

## פעולות וחבורות - מדריך למורה

### א. פעולות בין מספרים

החלק הראשון של הפרק מתרכז בפעולות שונות בין מספרים. מטרתו היא לתת מבט רחב יותר על מושג הפעולה, ולאפשר לתלמידים להתנסות בעבודה עם פעולות שונות מאלו שהכירו עד היום, ולבחון באופן שונה פעולות מוכרות.

מטרת השאלות הבאות היא לעורר את המודעות לתכונות השונות של פעולות, לפני הגדרת תכונות אלו באופן פורמלי.

1. תוצאות אפשריות מ-6 ו-9:

$$\text{חיבור: } 15 = 9 + 6 = 6 + 9$$

$$\text{חיסור: } 3 = 6 - 9 \quad 3 = 9 - 6$$

$$\text{כפל: } 54 = 6 \times 9 = 9 \times 6$$

חילוק:

2. את פעולות הכפל, החיבור והחיסור ניתן לבצע על כל זוג מספרים. את פעולת החילוק לא ניתן לבצע אם המספר השני בזוג הוא אפס.

בכל אחת מהפעולות יכולה להתקבל כל תוצאה. אם נרצה לקבל למשל 77:

$$77 = 0 + 77 = 0 - 77 = 1 \times 77 = 77 : 1$$

3. א. כל הזוגות בהן  $y < 0$ .

ב. כל הזוגות בהם  $y = 1$  או  $y = -1$  וכן גם כל הזוגות בהם  $x = 0$  ו  $y \neq 0$ .

ג. כל הזוגות בהם  $x > 0$  וגם  $y < 1$  או  $y < -1$  וכן כל הזוגות בהם  $x < 0$  וגם  $y > 1$  או  $y > -1$ .

4. א. 1. -1 2. -2 3. 0.4 4. 10.3 5. 0

ב. מחיבור מספרים נגדיים יתקבל תמיד 0.

5. א. 1. 1 2. 0.5 3. 0.4 4. 0.5 לא קיים הופכי.

ב. המכפלה של זוג הופכיים היא תמיד 1.

6. א. תוצאה ש לכפל נגדיים יכולה להיות שלילי או 0.

ב. מנת שני נגדיים תהיה -1, למעט הזוג (0,0) שלא מוגדרת לו מנה.

ג. כל מספר יכול להתקבל מחיסור נגדיים. לדוגמא כדי לקבל -5.5 אפשר לחסר

$$-2.25 - 2.25$$

7. קיימים מספרים שההפרש בינם ובין ההוכי שלהם קטן מ-1, למשל  $\frac{8}{9}$ ,  $\frac{9}{8}$ .

ומספרים שההפרש בינם לבין ההופכי שלהם גדול מ-1, למשל 2, 0.5.

אם משנים את המספר באופן רציף, ניתן לשער (אם כי לא להוכיח, בשלב זה) שגם ההפרש בין המספר להופכי שלו ישתנה באופן רציף, וכי על הרצף בין  $\frac{9}{8}$  ל-2 יהיה מספר שההפרש בינו לבין ההופכי שלו הוא בדיוק 1.

### 8. מרחק בין שני מספרים

א.

1  $12 \cdot 24 = 12$     3  $3.4 \cdot 0 = 3.4$     5  $(3 \cdot 5) \cdot 6 = 4$     7  $(-3.16) \cdot (-16.3) = 9.14$   
 2  $(-7) \cdot 16 = 23$     4  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$     6  $(-2) \cdot (42 \cdot 2) = 40$     8  $(-2) \cdot (-2 \cdot 2) = 6$

ב. רק מספר חיובי או 0 יכולים להתקבל כתוצאה של הפעולה.

ג.

1.  $x = 10$ ,  $x = -2$

2. אין פתרון, מרחק אינו יכול להיות שלילי

3. אין פתרון. המרחק של מספר מעצמו הוא תמיד 0.

4.  $x = 2$

5.  $x = 2$

6. כל מספר הוא פתרון של המשוואה.

ד. 1.  $x = 5.4$   $y = 10.8$ ,  $x = 0$   $y = 0$ ,  $x = 2$   $y = 4$

2.  $x$  הוא חיבי או 0 ו- $y$  גדול פי 2 מ- $x$ .

### 9. ממוצע חשבוני

א.

1  $12 \Delta 24 = 18$     3  $3.4 \Delta 0 = 1.7$     5  $(3 \Delta 5) \Delta 6 = 5$   
 2  $(-7) \Delta 16 = 4.5$     4  $\frac{2}{3} \Delta \frac{3}{2} = \frac{13}{12}$     6  $(-2) \Delta (42 \Delta 2) = 10$

ב. זוגות מספרים שהממוצע החשבוני שלהם הוא 5:

(1,9), (-100,110), (5,5)

זוגות מספרים שהממוצע החשבוני שלהם הוא -5:

(-10,0), (50,-60)

ג. כן. כל מספר יכול להתקבל. כל מספר הוא הממוצע החשבוני שלו עם עצמו.

ד. זוהי הפעם הראשונה בחוברת בה התלמידים נתקלים בלוח פעולה. כדאי להסביר ולהדגים בכיתה.

$\Delta$	1	2	3	4	5	6
1	1	1.5	2	2.5	3	3.5
2	1.5	2	2.5	3	3.5	4
3	2	2.5	3	3.5	4	4.5
4	2.5	3	3.5	4	4.5	5
5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
6	3.5	4	4.5	5	5.5	6

תכונות הטבלה:

האלכסונים מכיוון ימין לכיוון שמאל למטה הם אחדים.

הערך עולה בחצי בכל צעד ימינה ובכל צעד למטה.

המספרים על האלכסון הראשי זהים למספרים בשולי הטבלה.

הערך עולה ב-1 בירידה באלכסון ימינה.

כדאי לבקש מהתלמידים להסביר כל אחת מהתכונות האלו (הם נתקלו במשימות כאלו ביסודי בנוגע ללוח החיבור ולוח הכפל).

ד.

1.  $x=8$
2.  $x = -13$
3.  $x=3$
4.  $x=0$

ה.

$$\begin{aligned} x \Delta (3x) &= 2x \\ x \Delta (-x) &= 0 \\ (x \Delta x) \Delta x &= x \\ x \Delta (0 \Delta x) &= \frac{3}{4}x \end{aligned}$$

ו. 1.  $x=1 \ y=1, \ x=2 \ y=2, \ x=-10 \ y=-10$

2. המאפיין הוא  $x=y$ .

## 10. מקסימום

א.

1  $12 \square 24 = 24$

3  $3.4 \square 0 = 3.4$

5  $(3 \square 5) \square 6 = 6$

2  $61 \square (-7) = 61$

4  $\frac{3}{2} \square \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

6  $(-2) \square (42 \square 2) = 42$

ב.  $-100, -200$

כל מספר יכול להתקבל כתוצאה מהפעולה. כל מספר הוא המקסימום שלו ושל מספר הקטן מנמו, או שלו עם עצמו.

ג.

$\square$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

מאפייני לוח הפעולה:

– אזורים אחידים בצורת "ריש הפוכה": ממלאים את הטור והשורה של 5 ב-5, ולאחר מכן מלאים את המקומות הריקים בטור ובשורה של ה-4 וכן הלאה.

– המספרים על האלכסון משמאל זהים למספרים בשוליים.

– הלוח סימטרי סביב האלכסון משמאל.

ד. 1.  $x=6$

2. אין פתרון. התוצאה צריכה להיות לפחות 11.

3.  $x=3$

4.  $x=2, x=3$ . כל מספר הגדול או שווה ל-2 הוא פתרון.

ה.

1  $x \square (x-2) = x$

2  $(x \square x) \square x = x$

3  $\frac{x}{x} \square \left(-\frac{x}{x}\right) = 1^*$

4  $x \square (3 \square x) = 3 \square x$

\* בסעיף 3 – אם  $x=0$  הביטוי לא מוגדר. השוויון ל-1 הוא רק עבור  $x \neq 0$ .

ו. 1. נבחן שני מקרים:

– אם  $x < 0$  אז שני האגפים שווים ל-0.

– אם  $x \geq 0$  אז שני האגפים שווים ל- $x$ .

2. נבחן שני מקרים:

– אם  $x > 1$  או  $x < -1$  אז שני האגפים שווים  $x^2$ .

– אחרת שני האגפים שווים 1.

ז.  $x=1, y=0, \quad x=1, y=1, \quad x=2, y=1$

מאפיין הזוגות:  $x$  גדול או שווה ל- $y$ .

### 11. צירוף עשרוני:

א.

$$1 \quad 12 \diamond 24 = 12.24 \quad 2 \quad 7 \diamond 16 = 7.16 \quad 3 \quad 11 \diamond 111 = 11.111 \quad 4 \quad 23 \diamond 0 = 23 \quad 5 \quad 0 \diamond 23 = 0.23$$

ב. לא ניתן לבצע את הפעולה על כל זוג מספרים. בהגדרת הפעולה רשום כי ניתן לבצע אותה רק על זוג מספרים שלמים לא שליליים.

ג. לביטוי יש משמעות רק כאשר הביטוי בסוגריים הוא שלם, וזה מתקיים רק אם  $x=0$ .

ד. זו שאלת אתגר המיועדת רק לתלמידים מאד חזקים (הידע הדרוש לפתרון השאלה אינו כלול בתוכנית הלימודים). מספרים אי-שליליים מספר סופי של ספרות אחרי הנקודה יכולים להתקבל. מתוך הרציונלים הלא שליליים – אלו הם המספרים שהמכנה שלהם מורכב רק מהגורמים הראשוניים 2 ו-5.

ה.

1.  $x=6$

2.  $x=4$

3.  $x=0$

4. אין פתרון.

5.  $x=0$

6.  $x=0$

7.  $x=1$

8. אין פתרון. אין מספר  $x$  שיקיים את השוויון, משום שהרישום העשרוני של

$\frac{1}{3}$  הוא עם אינסוף ספרות.

ו. אלו הם כל הזוגות בהם  $x$  שלם לא שלילי, ו- $y$  הוא 0.  
 למשל:  $x=1, y=0$      $x=0, y=0$      $x=100, y=0$

12. **פעולה משלכם:** נשאיר ליצירתיות ולדמיון של התלמידים....

### פעולת השעון

13. א. בעוד 6 שעות השעה תהיה 10.

ב. בעוד 10 שעות השעה תהיה 3.

ג. בעוד 12 שעות השעה תהיה 7.

14.

$$\text{א} \quad 3 \oplus_{12} 2 = 5$$

$$\text{ב} \quad 3 \oplus_{12} 11 = 2$$

$$\text{ג} \quad 11 \oplus_{12} 3 = 2$$

$$\text{ד} \quad 12 \oplus_{12} 3 = 3$$

15. כן. כל מספר יכול להתקבל מפעולת שעון על עצמו ועל 12.

16. א.  $X=2$

ב.  $x=12$ . אין פתרונות נוספים.

17. א.  $X=1$

ב.  $X=7$

ג. אין פתרון.

ד. כל שעה על השעון היא פתרון.

18. הזוגות המקיימים את המשוואה הם כל הזוגות בהם  $x=12$ . למשל:

$$x=12, y=1 \quad x=12, y=2 \quad x=12, y=12$$

19. א. ישנם 12 זוגות כאלו:

- $x=1, y=5$
- $x=2, y=4$
- $x=3, y=3$
- $x=4, y=2$
- $x=5, y=1$
- $x=6, y=12$
- $x=7, y=11$
- $x=8, y=10$
- $x=9, y=9$
- $x=10, y=8$
- $x=11, y=7$
- $x=12, y=6$

ב. המיקום של כל זוג מספרים על השעון הוא סימטרי סביב לציר הרוחב העובר בין 3 ל-9. הסבר אפשרי: כל תרגיל חיבור (לו היה חיבור רגיל) ניתן להשוות ל  $3+3$  או ל  $9+9$  ותוצאות שני תרגילים אלו על השעון הם השעה 6.

### שעונים אחרים

20.

א|  $3 \oplus_{10} 2 = 5$

ב|  $3 \oplus_{10} 9 = 2$

ג|  $9 \oplus_{10} 9 = 8$

ד|  $10 \oplus_{10} 3 = 3$

21. א.  $x=1$

ב.  $x=5$

ג. אין פתרון.

ד. כל מספר הוא פתרון.

22. כל הזוגות בהם  $y=10$ :

$x=1, y=10$

$x=2, y=10$

...

$x=10, y=10$

ב. אם  $y$  שונה מ-10, מהלך מ- $x$  של  $y$  שעות על השעון יגיע לשעה שונה מ- $x$ .

23. א. בשעון 7 יש 7 מספרים.

ב.

$\oplus_7$	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

ג. תכונות של הלוח:

- כל אחת מהשורות של לוח הפעולה הסטה של השורה שמעליה ב-1 (כאשר ההתחלה "עוברת" לסוף).
- אותו דבר לגבי הטורים - משמאל לימין.
- כל אחד מהאלכסונים מימין מופיע מספר יחיד.
- בכל אלכסון משמאל יש דילוגים של 2 בין מספר למספר.
- הלוח סימטרי סביב האלכסון הראשי משמאל.

ד. יש 7 זוגות המקיימים את המשואה. המאפיין: כל זוג ממוקם סימטרית סביב האנך העובר דרך השעה 7.

24. א.

$\oplus$ 6	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	1
2	3	4	5	6	1	2
3	4	5	6	1	2	3
4	5	6	1	2	3	4
5	6	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

ב. למעשה, כל התכונות שציינו בסעיף 23ג הן משותפות לשני הלוחות.

ב. תכונות של פעולות

1. פעולות הכפל והחיבור הן חילופיות. פעולות החיסור והחילוק אינן חילופיות. הנימוק הוא על-ידי דוגמאות לזוגות מספרים שאינם מקיימים את דרישת תכונת החילופיות:

$$2-1 \neq 1-2, \quad \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$$

2. א. מרחק בין מספרים הוא חילופי: בכל זוג מספרים תמיד נחסר את הקטן מהגדול, ולכן שינוי הסדר בתרגיל לא ישנה את התוצאה.

ב. צירוף עשרוני אינו חילופי:  $2.1 \neq 1.2$ .

ג. שעון 12 הוא חילופי. תכונה זו נובעת מחילופיות החיבור. ביתר פירוט: אם לגומא נקח את התרגיל

$$11 \oplus 3 = 12$$

אפשר להגדיר גם כך: לאיזו שעה נגיע אם נתקדם משעה 12 קודם 3 צעדים ואז 7 צעדים? אם נשאל "לאיזו שעה נגיע אם נתקדם משעה 12 קודם 7 צעדים ואז 3 צעדים?" נקבל אותה תוצאה.

3. החיבור היא פעולה קיבוצית, וכך גם הכפל.

החיסור אינו קיבוצי:  $(3-2)-1 \neq 3-(2-1)$ .

החילוק אינו קיבוצי:  $(3:1):2 \neq 3:(1:2)$ .



$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad .4$$

$$(3 \cdot 3) \cdot 0 \neq 3 \cdot (3 \cdot 0) \quad .5 \text{ א. מרחק: אינה קיבוצית. למשל}$$

צירוף עשרוני אינה קיבוצית. לרוב התבנית  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  כלל לא תהיה

מוגדרת עבור צירוף עשרוני, כי תוצאת התרגיל הסוגריים לא תהיה מספר שלם. שיעון 12 הוא קיבוצי: נובע מקיבוציות החיבור (ראו פירוט בתשובה א2). פעולת המקסימום היא קיבוצית, כי בהנתן שלשה של מספרים, הפעולות ביניהם תמיד יתנו את הגדול ביותר, בלא קשר לסדר בו הן מבוצעות.

ב. אם בבלה יש שורה הסותרת את תכונת הקיבוציות - אפשר לקבוע על פיה כי הפעולה אינה קיבוצית.

אם בטבלה אין שורה כזו, עדיין לא ניתן לקבוע אם הפעולה קיבוצית, משום שיתכן שקיימת שלשה שאינה בטבלה הסותרת את תכונת הקיבוציות. (באופן תאורטי, אם מדובר בקבוצות סופיות, כפי שנכיר בסעיף הבא, ניתן להכין טבלה הכוללת את כל השלשות האפשריות, אך זו מלאכה מאד ממושכת ומייגעת).

ג. למשל פעולת המקסימום: אפשר לקבוע בוודאות כי היא קיבוצית (מהנימוק הרשום למעלה) גם בלי לבדוק את כל השלשות האפשריות (במקרה זה - אינסוף שלשות).

### מספר ניטרלי

$$x+0=x \quad .6 \text{ א.}$$

$$x=x+0 \quad .6 \text{ ב.}$$

$$x \cdot 1=x \quad .6 \text{ ג.}$$

$$x=x \cdot 1 \quad .6 \text{ ד.}$$

$$\text{כפל: } 1 \cdot 1 \text{ חיבור: } 0 \quad .7$$

לפי הגדרת המספר הניטרלי, המספר צריך לקיים את התכונה "משני הכיוונים", אבל לדוגמה  $1:7 \neq 7$ .

לשעון 12 יש מספר ניטרלי: 12. .9

אם 0 הוא מספר ניטרלי אז  $0 \circ 1 = 1$ , ואם 1 הוא ניטרלי אז  $0 \circ 1 = 0$ , וזו סתירה. .10

לכן פעולה כזו לא תיתכן.

ב. מההסבר למעלה נובע כי לא יכולים להיות לפעולה שני מספרים ניטרלים שונים. אם קיים מספר ניטרלי - הוא יחיד.

### מספרים הפוכים

$$x=1, y=-1 \quad x=2, y=-2 \quad x=0, y=0 \quad .11 \text{ א.}$$

$$x=1, y=1 \quad x=-1, y=-1 \quad x=\frac{1}{3}, y=3 \quad x=3, y=\frac{1}{3} \quad .11 \text{ ב.}$$

$$3.5, -3.5 \quad 100, -100 \quad .12 \text{ א.}$$

- ב. אלו מספרים שנמצאים במרחק שווה מ-0 על ציר המספרים, ובשני כיוונים שונים. כדי לקבל את ההפוך ביחס לחיבור ניתן להכפיל ב -1 .  
 ג. לכל מספר ישי הפוך: המכפלה ב -1 מוגדרת לכל מספר.

13. א. מספרים הפוכים ביחס לכפל:  $1,1$   $10,0.1$   $-3,-\frac{1}{3}$  .

- ב. זוגות שהשני בהם הוא 1 חלקי הראשון.  
 ג. ל-0 אין הפוך. כל מספר כפול 0 יתן 0, ולא 1. ברור שהתכונה ב לא מתקיימת, כי חילוק ב-0 אינו מוגדר (בממשיים).

14. אין זוגות כאלו, משום שלפעולות אלו אין איבר ניטרלי.

15. לכל מספר יש הפוך: המספר שממוקם באופן סימטרי מולו ביחס לציר שעובר צרך 6 ו-12.

16. הם אינם הפוכים, כי לפעולה אין איבר ניטרלי.

17. א. פעולת הכפל: המספר הניטרלי בפעולה זו הוא 1 ואכן  $0.5 \cdot 2 = 1$  .

ב. יש שגיאה בספר בסעיף זה..

ג. חיבור. המספר הניטרלי לפעולה זו הוא 0, ואכן  $0 = 0 + 0$ .

ד. חיבור (נימוק דומה לג).

ה. גם בסעיף זה יש שגיאה בספר.

ו. שעון 12. המספר הניטרלי בפעולה זו הוא 12 ואכן  $8 \oplus_{12} 4 = 12$  .

18. א. 1. תוצאת חיבור שני מספרים טבעיים תמיד תהיה טבעי.

2. לא. למשל  $1 - 2 = -1$  .

ב. 1. כן.

2. לא. למשל  $1 : 7 = \frac{1}{7}$  .

ג. 1. לא.  $1 + 1 = 2$  .

2. כן:  $1 \cdot 1 = 1$  ,  $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0$  .

19. המספרים הטבעיים סגורים תחת כפל, אך לא תחת חילוק, למשל  $1 : 7 = \frac{1}{7}$  .

20. הטבעיים אינם סגורים תחת מרחק: מרחק של מספר מעצמו הוא 0, ו-0 אינו טבעי.

ממוצע חשבוני: לא. למשל הממוצע החשבוני של 1 ו-2 הוא 1.5.

מקסימום: כן. מקסימום של שני טבעיים יהיה שווה לאחד מהם, ולכן יהיה טבעי.

צירוף עשרוני: לא. למשל הצירוף העשרוני של 1 ו-2 הוא 1.2.

21. א. כי למשל  $3 + 1 = 4$

ב. כן. סכום זוגיים הוא תמיד זוגי.

ג. כן. מכפלת אי-זוגיים היא אי-זוגית.

ד. כן. הפרש שלמים הוא שלם.

ה. לא. מנת שלמים יכולה להיות מספר לא שלם, לדוגמה  $1:2 = \frac{1}{2}$ .

22. כן. תוצאת הפעולה "שעון 12" על כל זוג מתוך המספרים בקבוצה תהיה מספר אחר בקבוצה.

### פעולות המוגדרות על-פי לוחות פעולה

23. א. כן. כל המספרים בלוח, המתארים את תוצאות הפעולה, הם מתוך הקבוצה.  
ב. (שימו לב: בספר יש שגיאת דפוס בסעיף 5)

1  $1 \nabla 2 = 1$

3  $(0 \nabla 1) \nabla 2 = 2$

5  $(1 \nabla 2) \nabla 0 = 2$

2  $(1 \nabla 2) \nabla 1 = 2$

4  $0 \nabla (1 \nabla 2) = 2$

6  $(0 \nabla 2) \nabla (1 \nabla 2) = 2$

ג.

1.  $x=2$
2.  $x=2$
3.  $x=0$
4.  $x=0, x=2$

ד. 1. כן, כן.

2. צריך לבדוק את הזוג הנותר המורכב מאיברים שונים:  $2 \nabla 1 = 1 \nabla 2$ .

ה. מספיק למצוא שלשה אחת שסותרת את התכונה. למשל:

$$(0 \nabla 0) \nabla 1 = 2$$

$$0 \nabla (0 \nabla 1) = 1$$

ו. אין מספר ניטרלי. דרך לראות זאת: אם בטבלת פעולה יש מספר ניטרלי, השורה המאימה לו זהה לשורה בשוליי העליונים, ובטבלה הנתונה אין שורה כזו.  
ז. כיוון שאין מספר ניטרלי, לא מוגדרים מספרים הפוכים לפעולה זו.

א. 24.

א  $6 \odot 3 = 2$

ג  $(4 \odot 5) \odot 6 = 4$

ב  $3 \odot 6 = 4$

ד  $4 \odot (5 \odot 6) = 4$

ב.  $x=1$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ג. כן, 1 הוא המספר הניטרלי. אנו רואים זאת לפי השורה והטור המתאימים לו בטבלה.  
ד. לכל המספרים יש הפוכים. 1, 2, 3, ו-4 הם הפונכים של עצמם. 5 ו-6 הפוכים זה לזה.  
ה. לא. לכל מספר יש הפוך יחיד.

ו. ישנם 6 פתרונות.  $X=1$  - האיבר הניטרלי, ו- $y$  יכול להיות כל אחד מהמספרים בקבוצה. ניתן לוודא לפי הטבלה כי לא קיימים למשוואה עוד פתרונות.

ז. 1. לא. 2. כן. 3.  $\{1,2\}, \{1,4\}$ .

ח. הדומה: שתי הפעולות מקיימות את תכונות הקיבוציות, בשתייהן יש איבר ניטרלי, ובשתייהן לכל איבר יש הפוך. בשני המקרים הקבוצה סגורה ביחס לפעולה. השונה: פעולת שיעון 6 היא חילופית, ופעולת החיך אינה חילופית.

25. א. 1 הוא איבר ניטרלי ביחס לפיצוץ. ניתן לראות זאת לפי לוח הפעולה.  
 ב. ישנם 7 זוגות כאלו: 1,1 2,2 3,3 4,4 2,3 3,4 2,4.  
 ג. הפעולה חילופית. ניתן לראות זאת על-פי לוח הפעולה, שהינו סימטרי ביחס לאלכסון הראשי משמאל.  
 ד.

$$\begin{array}{ll} 1 \oplus (1 \otimes 2) \otimes 1 = 2 & 3 \oplus 1 \otimes (2 \otimes 1) = 2 \\ 2 \oplus (2 \otimes 2) \otimes 4 = 4 & 4 \oplus 2 \otimes (2 \otimes 4) = 2 \end{array}$$

ה. הפעולה אינה קיבוצית - ראו סעיף ד תרגילים 2,4.

- ו. 1.  $x=1$
2. אין פתרון. (המספר 2 לא מופיע על האלכסון הראשי בטבלה.)
3. אין פתרון.
4.  $x=1$

### ג. חבורות

1. א. סגירות: סכום שלמים הוא שלם.  
 ב. החיבור הוא פעולה קיבוצית.  
 ג. ניטרלי: 0.  
 ד. המספר ההפוך: הנגדי.
  - \* שימו לב כי אנו מחקים כאן את קבוצת השלמים ל"זוגיים" ול"אי-זוגיים". כאן אנו כוללים ב"זוגיים" את כל הכפולות השלמות של 2, כולל השלילים.
  2. לא. הקבוצה לא סגורה לגבי הפעולה: סכום אי-זוגיים הוא זוגי. כמו כן, לא קיים לה איבר ניטרלי (0 הוא זוגי).
  3. קיבוציות נובעת מקיבוציות החבור. 0 שייך לקבוצה, והוא ניטרלי לגבי חיבור. הנגדי של כל זוגי הוא גם שלם זוגי. סכום שלמים זוגיים הוא שלם זוגי. דוכמאות להפוכים:
- 100,100    2,-2    0,0
4. לא. ל-0 אין הפוך (כלומר, איחון מספר שמכפלתו ב-0 תהיה 1).
  5. זוהי חבורה. איבר ניטרלי (1) וקיום הופכי ברורים מהטבלה. את הקיבוציות יש לבדוק על-ידי בחינת כל המקרים האפשריים, אך ניתן לצמצמם בדיקה זו, אם נזכור כי 1 היא ניטלי, ולכן אין לו השפעה על תוצאת הפעולה מכאן כל שלשה בה 1 מופיע פעמיים תקיים את תכונת הקיבוציות. נותר לבדוק במפורש את 2,2,1, את 1,2,2, ואת 2,1,2 כדי לוודא שהפעולה קיבוצית.

6. לא. אין לה איבר ניטרלי.
7. א. מצאנו כבר כי יש בקבוצה איבר ניטרלי תחת חיוך וכי לכל איבר יש הפוך. קל לודא על-ידי הטבלה כי הקבוצה סגורה תחת חיוך. נתון שהפעולה קיבוצית. לכן זו חבורה.  
 ב. זוהי חבורה. את כבר הוכחנו במשימות קודמות כי מתקיימות הכונות: קיבוציות, קיום ניטרלי, קיום הפוך לכל איבר וסגירות. לכן "שעון 12" עונה על הגדרת החבורה.
8. א. מקיימות את תכונת החילופיות: חבורת השלמים תחת חיבור, חבורת שעון 12, "חבורת הפרח" משאלה 5.  
 ב. החבורה יחידה שהוזכרה ביחידה זו יאינה חילופית היא "חבורת החיוך".
9. א. ניתן לבנות את הטבלה על-פי הרמז בשאלה.

°	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

- ב. קודם נראה כי האיבר היחיד שיכול להיות ניטרלי הוא 3, ונמלא את הטור והשורה שלו בהתאם. לאחר מכן נוכל למצוא את  $2 \circ 1$  על סך הקיבוציות:  $(2 \circ 2) \circ 1 = 2 \circ (2 \circ 1)$ ,  
 ואת  $1 \circ 2$  נמצא על-פי  $(1 \circ 2) \circ 2 = 1 \circ (2 \circ 2)$ .

°	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3